

VEHICLE DYNAMICS - LATERAL

ANDRÉ DE SOUZA MENDES

ARTICULATED VEHICLE MODEL

São Bernardo do Campo

2016

0.1 MODELO DO VEÍCULO ARTICULADO

O modelo físico do conjunto é ilustrado na figura 1. Para caracterizar a dinâmica deste sistema é utilizada a base $\Omega_O = \{O\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}\}$ fixa no referencial inercial. A base $\Omega_T = \{T\mathbf{t}_x\mathbf{t}_y\mathbf{t}_z\}$ é solidária ao caminhão-trator e a base $\Omega_S = \{S\mathbf{s}_x\mathbf{s}_y\mathbf{s}_z\}$ é solidária ao semirreboque. Os versores \mathbf{t}_x e \mathbf{s}_x apontam para frente na direção longitudinal de ambos os módulos e os versores \mathbf{t}_y e \mathbf{s}_y apontam para a esquerda. Para auxiliar a descrição das grandezas no eixo dianteiro é definida a base $\Omega_F = \{F\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z\}$ solidária ao eixo dianteiro com o versor \mathbf{e}_x apontando para frente na direção longitudinal do pneu e \mathbf{e}_y apontando para a esquerda. Os pontos T e S localizam o centro da massa do caminhão-trator e do semirreboque, respectivamente. F e R localizam os eixos dianteiro e traseiro, respectivamente. A é o ponto de articulação e M é o eixo do semirreboque. O ponto O é a origem do sistema e se encontra fixo no referencial inercial. A distância a separa os pontos F e T e a distância b separa os pontos T e R. c separa os pontos R e A, d separa os pontos A e S e e separa os pontos S e M. Os vetores velocidade \mathbf{v} e os ângulos de deriva α recebem os subscritos referentes aos pontos aos quais eles estão associados.

A modelagem do caminhão-trator e semirreboque consiste na utilização de dois corpos rígidos que se movimentam sobre um plano horizontal e são unidos por um ponto de articulação. Desta forma, o modelo apresenta quatro graus de liberdade. Portanto, as coordenadas generalizadas podem ser dadas por

$$q_1 = x \tag{1a}$$

$$q_2 = y \tag{1b}$$

$$q_3 = \psi \tag{1c}$$

$$q_4 = \phi, \tag{1d}$$

onde x e y são as coordenadas longitudinal e transversal do centro de massa do caminhão-trator, respectivamente. ψ é o ângulo de orientação absoluta do caminhão-trator e ϕ é o ângulo de orientação relativa do semirreboque.

0.1.1 Modelo não linear

O vetor posição do centro de massa do caminhão-trator em relação ao ponto O é

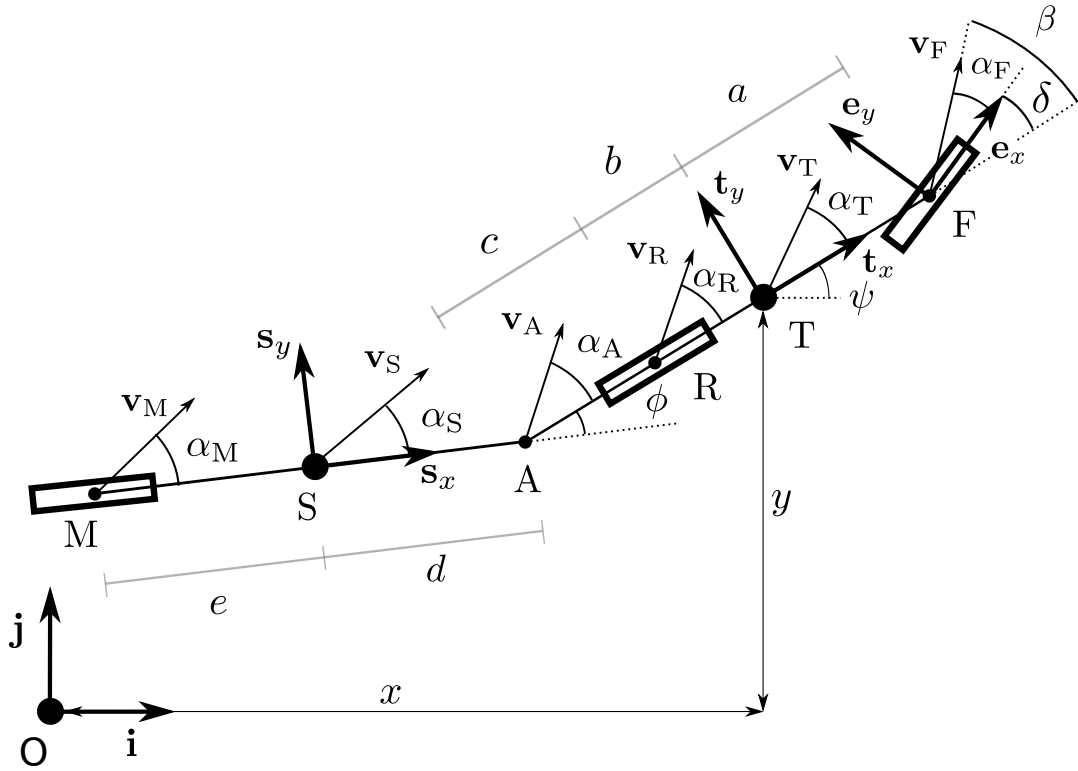


Figura 1 – Single track bicycle model.

$$\mathbf{p}_{T/O} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \quad (2)$$

O vetor posição do centro de massa do semirreboque é

$$\mathbf{p}_{S/O} = [x - (b + c) \cos \psi - d \cos (\psi - \phi)] \mathbf{i} + [y - (b + c) \sin \psi - d \sin (\psi - \phi)] \mathbf{j}. \quad (3)$$

Derivando a equação (2) em relação ao tempo temos

$$\mathbf{v}_T = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}. \quad (4)$$

Derivando a equação (3) em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S &= [\dot{x} + (b + c) \dot{\psi} \sin \psi + d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin (\psi - \phi)] \mathbf{i} + \dots \\ &\dots + [\dot{y} - (b + c) \dot{\psi} \cos \psi - d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos (\psi - \phi)] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (5)$$

O vetor velocidade angular do caminhão-trator é

$$\mathbf{w}_T = \dot{\psi} \mathbf{k}. \quad (6)$$

O vetor velocidade angular do semirreboque é

$$\mathbf{w}_S = (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \mathbf{k} \quad (7)$$

A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} m_T \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{v}_T + \frac{1}{2} m_S \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \{\mathbf{w}_T\}^T [\mathbf{J}_T] \{\mathbf{w}_T\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{w}_S\}^T [\mathbf{J}_S] \{\mathbf{w}_S\}. \quad (8)$$

Substituindo as equações (4), (5), (6), (7) em (8) temos

$$T = \frac{1}{2} m_T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_S (C_1^2 + C_2^2) + \frac{1}{2} I_T \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_S (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2, \quad (9)$$

onde

$$C_1 = \dot{x} + (b + c) \dot{\psi} \sin \psi + d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin (\psi - \phi) \quad (10a)$$

$$C_2 = \dot{y} - (b + c) \dot{\psi} \cos \psi - d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos (\psi - \phi). \quad (10b)$$

Derivando a equação (10) temos

$$\dot{C}_1 = \ddot{x} + (b + c) \ddot{\psi} \sin \psi + (b + c) \dot{\psi}^2 \cos \psi + d (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}) \sin (\psi - \phi) + d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \cos (\psi - \phi) \quad (11a)$$

$$\dot{C}_2 = \ddot{y} - (b + c) \ddot{\psi} \cos \psi + (b + c) \dot{\psi}^2 \sin \psi - d (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}) \cos (\psi - \phi) + d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin (\psi - \phi) \quad (11b)$$

As derivadas parciais da energia cinética do sistema (equação (9)) em relação às coordenadas generalizadas são

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial T}{\partial \psi} &= m_S C_1 \left[(b+c) \dot{\psi} \cos \psi + d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos (\psi - \phi) \right] + \dots \\ &\dots + m_S C_2 \left[(b+c) \dot{\psi} \sin \psi + d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin (\psi - \phi) \right] \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_4} = \frac{\partial T}{\partial \phi} = m_S C_1 \left[-d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos (\psi - \phi) \right] + m_S C_2 \left[-d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin (\psi - \phi) \right]. \quad (12d)$$

As derivadas parciais da energia cinética do sistema em relação às derivadas temporais das coordenadas generalizadas são

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_T \dot{x} + m_S C_1 \quad (13a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_T \dot{y} + m_S C_2 \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= m_S C_1 \left[(b+c) \sin \psi + d \sin (\psi - \phi) \right] + \dots \\ &\dots + m_S C_2 \left[-(b+c) \cos \psi - d \cos (\psi - \phi) \right] + I_T \dot{\psi} + I_S (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_4} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m_S C_1 \left[-d \sin (\psi - \phi) \right] + m_S C_2 \left[d \cos (\psi - \phi) \right] - I_S (\dot{\psi} - \dot{\phi}). \quad (13d)$$

Derivando as equações (13) em relação ao tempo temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_T \ddot{x} + m_S \dot{C}_1 \quad (14a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m_T \ddot{y} + m_S \dot{C}_2 \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_S \dot{C}_1 \left[(b+c) \sin \psi + d \sin (\psi - \phi) \right] + \dots \\ &\dots + m_S C_1 \left[(b+c) \dot{\psi} \cos \psi + d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos (\psi - \phi) \right] + \dots \\ &\dots + m_S \dot{C}_2 \left[-(b+c) \cos \psi - d \cos (\psi - \phi) \right] + \dots \\ &\dots + m_S C_2 \left[(b+c) \dot{\psi} \sin \psi + d (\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin (\psi - \phi) \right] + \dots \\ &\dots + I_T \ddot{\psi} + I_S (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}) \end{aligned} \quad (14c)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = m_S \dot{C}_1 [-d \sin(\psi - \phi)] + m_S C_1 [-d(\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos(\psi - \phi)] + \dots \\
&\dots + m_S \dot{C}_2 [d \cos(\psi - \phi)] + m_S C_2 [-d(\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin(\psi - \phi)] - \dots \\
&\dots + -I_S (\ddot{\psi} - \ddot{\phi})
\end{aligned} \tag{14d}$$

A força no eixo dianteiro é dada por

$$\mathbf{F}_F = F_{x,F} \mathbf{e}_x + F_{y,F} \mathbf{e}_y, \tag{15}$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_F = [F_{x,F} \cos(\psi + \delta) - F_{y,F} \sin(\psi + \delta)] \mathbf{i} + [F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{y,F} \cos(\psi + \delta)] \mathbf{j}. \tag{16}$$

A força no eixo traseiro é

$$\mathbf{F}_R = F_{x,R} \mathbf{t}_x + F_{y,R} \mathbf{t}_y \tag{17}$$

ou

$$\mathbf{F}_R = [F_{x,R} \cos \psi - F_{y,R} \sin \psi] \mathbf{i} + [F_{x,R} \sin \psi + F_{y,R} \cos \psi] \mathbf{j}. \tag{18}$$

A força no eixo do semirreboque é

$$\mathbf{F}_M = F_{x,M} \mathbf{s}_x + F_{y,M} \mathbf{s}_y \tag{19}$$

ou

$$\mathbf{F}_M = [F_{x,M} \cos(\psi - \phi) - F_{y,M} \sin(\psi - \phi)] \mathbf{i} + [F_{x,M} \sin(\psi - \phi) + F_{y,M} \cos(\psi - \phi)] \mathbf{j}. \tag{20}$$

As forças generalizadas são

$$Q_k = \sum_{j=1}^p \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_k} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, 4 \\ j = F, R, M \end{array} \tag{21}$$

Ou seja,

$$Q_1 = \mathbf{F}_F \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_1} + \mathbf{F}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_1} + \mathbf{F}_M \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_1} \quad (22a)$$

$$Q_2 = \mathbf{F}_F \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_2} + \mathbf{F}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_2} + \mathbf{F}_M \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_2} \quad (22b)$$

$$Q_3 = \mathbf{F}_F \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_3} + \mathbf{F}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_3} + \mathbf{F}_M \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_3}, \quad (22c)$$

$$Q_4 = \mathbf{F}_F \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_4} + \mathbf{F}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_4} + \mathbf{F}_M \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_4}. \quad (22d)$$

Os pontos de aplicação das forças são localizados por

$$\mathbf{p}_{F/O} = (x + a \cos \psi) \mathbf{i} + (y + a \sin \psi) \mathbf{j}. \quad (23a)$$

$$\mathbf{p}_{R/O} = (x - b \cos \psi) \mathbf{i} + (y - b \sin \psi) \mathbf{j}. \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{M/O} &= [x - (b + c) \cos \psi - (d + e) \cos (\psi - \phi)] \mathbf{i} + \dots \\ &\dots + [y - (b + c) \sin \psi - (d + e) \sin (\psi - \phi)] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (23c)$$

Logo, as derivadas parciais

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial x} = \mathbf{i} \quad (24a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial y} = \mathbf{j} \quad (24b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_3} = \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial \psi} = -a \sin \psi \mathbf{i} + a \cos \psi \mathbf{j} \quad (24c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial q_4} = \frac{\partial \mathbf{p}_{F/O}}{\partial \phi} = 0, \quad (24d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial x} = \mathbf{i} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial y} = \mathbf{j} \quad (25b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_3} = \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial \psi} = b \sin \psi \mathbf{i} - b \cos \psi \mathbf{j} \quad (25c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial q_4} = \frac{\partial \mathbf{p}_{R/O}}{\partial \phi} = 0 \quad (25d)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial x} = \mathbf{i} \quad (26a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial y} = \mathbf{j} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_3} = \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial \psi} &= [(b+c) \sin \psi + (d+e) \sin(\psi-\phi)] \mathbf{i} + \dots \\ &\dots + [-(b+c) \cos \psi - (d+e) \cos(\psi-\phi)] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (26c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial q_4} = \frac{\partial \mathbf{p}_{M/O}}{\partial \phi} = [-(d+e) \sin(\psi-\phi)] \mathbf{i} + [(d+e) \cos(\psi-\phi)] \mathbf{j} \quad (26d)$$

Substituindo as equações (16), (18), (20), (24), (25) e (26) nas equações (22) temos

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_{x,F} \cos(\psi + \delta) + F_{x,R} \cos \psi + F_{x,M} \cos(\psi - \phi) - \dots \\ &\dots - F_{y,F} \sin(\psi + \delta) - F_{y,R} \sin \psi - F_{y,M} \sin(\psi - \phi) \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{x,R} \sin \psi + F_{x,M} \sin(\psi - \phi) + \dots \\ &\dots - F_{y,F} \cos(\psi + \delta) + F_{y,R} \cos \psi + F_{y,M} \cos(\psi - \phi) \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= F_{x,F} a \sin \delta + F_{x,M} (b+c) \sin \phi + \dots \\ &\dots + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b - F_{y,M} [(b+c) \cos \phi + (d+e)] \end{aligned} \quad (27c)$$

$$Q_4 = F_{y,M} (d+e) \quad (27d)$$

A formulação de Euler-Lagrange para este sistema é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (28)$$

Substituindo as equações (12), (14) e (27) em (28) temos

$$\begin{aligned}
m_T \ddot{x} + m_S \dot{C}_1 &= F_{x,F} \cos(\psi + \delta) + F_{x,R} \cos \psi + F_{x,M} \cos(\psi - \phi) - \dots \\
\dots &- F_{y,F} \sin(\psi + \delta) - F_{y,R} \sin \psi - F_{y,M} \sin(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{29a}$$

$$\begin{aligned}
m_T \ddot{y} + m_S \dot{C}_2 &= F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{x,R} \sin \psi + F_{x,M} \sin(\psi - \phi) + \dots \\
\dots &- F_{y,F} \cos(\psi + \delta) + F_{y,R} \cos \psi + F_{y,M} \cos(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{29b}$$

$$\begin{aligned}
m_S \dot{C}_1 [(b+c) \sin \psi + d \sin(\psi - \phi)] + m_S \dot{C}_2 [-(b+c) \cos \psi - d \cos(\psi - \phi)] + \dots \\
\dots + I_T \ddot{\psi} + I_S (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}) = \\
F_{x,F} a \sin \delta + F_{x,M} (b+c) \sin \phi + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b - F_{y,M} [(b+c) \cos \phi + (d+e)]
\end{aligned} \tag{29c}$$

$$m_S \dot{C}_1 [-d \sin(\psi - \phi)] + m_S \dot{C}_2 [d \cos(\psi - \phi)] - I_S (\ddot{\psi} - \ddot{\phi}) = F_{y,M} (d+e) \tag{29d}$$

Substituindo as equações (11) em (29)

$$\begin{aligned}
(m_T + m_S) \ddot{x} + m_S [(b+c) \sin \psi + d \sin(\psi - \phi)] \ddot{\psi} - m_S d \sin(\psi - \phi) \ddot{\phi} = \\
F_{x,F} \cos(\psi + \delta) + F_{x,R} \cos \psi + F_{x,M} \cos(\psi - \phi) - \dots \\
\dots - F_{y,F} \sin(\psi + \delta) - F_{y,R} \sin \psi - F_{y,M} \sin(\psi - \phi) \\
- m_S (b+c) \dot{\psi}^2 \cos \psi - m_S d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \cos(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{30a}$$

$$\begin{aligned}
(m_T + m_S) \ddot{y} - m_S [(b+c) \cos \psi + d \cos(\psi - \phi)] \ddot{\psi} + m_S d \cos(\psi - \phi) \ddot{\phi} = \\
F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{x,R} \sin \psi + F_{x,M} \sin(\psi - \phi) + \dots \\
\dots + F_{y,F} \cos(\psi + \delta) + F_{y,R} \cos \psi + F_{y,M} \cos(\psi - \phi) \\
- m_S (b+c) \dot{\psi}^2 \sin \psi - m_S d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin(\psi - \phi)
\end{aligned} \tag{30b}$$

$$\begin{aligned}
& m_S [(b+c) \sin \psi + d \sin (\psi - \phi)] \ddot{x} - m_S [(b+c) \cos \psi + d \cos (\psi - \phi)] \ddot{y} + \dots \\
& \dots + \left\{ m_S [(b+c)^2 + 2(b+c)d \cos \phi + d^2] + I_T + I_S \right\} \ddot{\psi} - \dots \\
& \dots - \left\{ m_S [(b+c)d \cos \phi + d^2] + I_S \right\} \ddot{\phi} = \dots \\
& \dots F_{x,F} a \sin \delta + F_{x,M} (b+c) \sin \phi + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b - F_{y,M} [(b+c) \cos \phi + (d+e)] - \dots \\
& - m_S (b+c) d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin \phi + m_S (b+c) d \dot{\psi}^2 \sin \phi
\end{aligned} \tag{30c}$$

$$\begin{aligned}
& -m_S d \sin (\psi - \phi) \ddot{x} + m_S d \cos (\psi - \phi) \ddot{y} - \left\{ m_S [d^2 + (b+c)d \cos \phi] + I_S \right\} \ddot{\psi} + \dots \\
& \left(m_S d^2 + I_S \right) \ddot{\phi} = \dots \\
& \dots F_{y,M} (d+e) - m_S (b+c) d \dot{\psi}^2 \sin \phi
\end{aligned} \tag{30d}$$

Os estado podem ser escolhidos como

$$z_1 = x \tag{31a}$$

$$z_2 = y \tag{31b}$$

$$z_3 = \psi \tag{31c}$$

$$z_4 = \phi \tag{31d}$$

$$z_5 = \dot{x} \tag{31e}$$

$$z_6 = \dot{y} \tag{31f}$$

$$z_7 = \dot{\psi} \tag{31g}$$

$$z_8 = \dot{\phi} \tag{31h}$$

Logo, as equações de estado são

$$\dot{z}_1 = z_5 \tag{32a}$$

$$\dot{z}_2 = z_6 \tag{32b}$$

$$\dot{z}_3 = z_7 \tag{32c}$$

$$\dot{z}_4 = z_8 \tag{32d}$$

$$\begin{aligned}
(m_T + m_S) \dot{z}_5 + m_S [(b + c) \sin z_3 + d \sin (z_3 - z_4)] \dot{z}_7 - m_S d \sin (z_3 - z_4) \dot{z}_8 = \\
F_{x,F} \cos (z_3 + \delta) + F_{x,R} \cos z_3 + F_{x,M} \cos (z_3 - z_4) - \dots \\
\dots - F_{y,F} \sin (z_3 + \delta) - F_{y,R} \sin z_3 - F_{y,M} \sin (z_3 - z_4) \\
-m_S (b + c) z_7^2 \cos z_3 - m_S d (z_7 - z_8)^2 \cos (z_3 - z_4)
\end{aligned} \tag{32e}$$

$$\begin{aligned}
(m_T + m_S) \dot{z}_6 - m_S [(b + c) \cos z_3 + d \cos (z_3 - z_4)] \dot{z}_7 + m_S d \cos (z_3 - z_4) \dot{z}_8 = \\
F_{x,F} \sin (z_3 + \delta) + F_{x,R} \sin z_3 + F_{x,M} \sin (z_3 - z_4) + \dots \\
\dots + F_{y,F} \cos (z_3 + \delta) + F_{y,R} \cos z_3 + F_{y,M} \cos (z_3 - z_4) \\
-m_S (b + c) z_7^2 \sin z_3 - m_S d (z_7 - z_8)^2 \sin (z_3 - z_4)
\end{aligned} \tag{32f}$$

$$\begin{aligned}
m_S [(b + c) \sin z_3 + d \sin (z_3 - z_4)] \dot{z}_5 - m_S [(b + c) \cos z_3 + d \cos (z_3 - z_4)] \dot{z}_6 + \dots \\
\dots + \left\{ m_S [(b + c)^2 + 2(b + c)d \cos z_4 + d^2] + I_T + I_S \right\} \dot{z}_7 - \dots \\
\dots - \left\{ m_S [(b + c)d \cos z_4 + d^2] + I_S \right\} \dot{z}_8 = \dots \\
\dots F_{x,F} a \sin \delta + F_{x,M} (b + c) \sin z_4 + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b - F_{y,M} [(b + c) \cos z_4 + (d + e)] - \dots \\
-m_S (b + c) d (z_7 - z_8)^2 \sin z_4 + m_S (b + c) dz_7^2 \sin z_4
\end{aligned} \tag{32g}$$

$$\begin{aligned}
-m_S d \sin (\psi - \phi) \dot{z}_5 + m_S d \cos (\psi - \phi) \dot{z}_6 - \left\{ m_S [d^2 + (b + c)d \cos \phi] + I_S \right\} \dot{z}_7 + \dots \\
\left(m_S d^2 + I_S \right) \dot{z}_8 = \dots \\
\dots F_{y,M} (d + e) - m_S (b + c) d \dot{\psi}^2 \sin \phi
\end{aligned} \tag{32h}$$

Em muitas ocasiões é conveniente fazer a substituição dos estados \dot{x} e \dot{y} por v_T e α_T . A relação entre estes pares de estados é

$$\dot{x} = v_T \cos (\psi + \alpha_T) \tag{33a}$$

$$\dot{y} = v_T \sin (\psi + \alpha_T). \tag{33b}$$

Derivando em relação ao tempo a equação (33) temos

$$\ddot{x} = \dot{v}_T \cos(\psi + \alpha_T) - v_T (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_T) \sin(\psi + \alpha_T) \quad (34a)$$

$$\ddot{y} = \dot{v}_T \sin(\psi + \alpha_T) + v_T (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_T) \cos(\psi + \alpha_T). \quad (34b)$$

Desta forma, substituindo as equações (34) nas equações (30) temos

$$\begin{aligned} & (m_T + m_S) \cos(\psi + \alpha_T) \dot{v}_T - (m_T + m_S) v_T \sin(\psi + \alpha_T) \dot{\alpha}_T + \dots \\ & + m_S [(b + c) \sin \psi + d \sin(\psi - \phi)] \ddot{\psi} - m_S d \sin(\psi - \phi) \ddot{\phi} = \\ & F_{x,F} \cos(\psi + \delta) + F_{x,R} \cos \psi + F_{x,M} \cos(\psi - \phi) - \dots \\ & \dots - F_{y,F} \sin(\psi + \delta) - F_{y,R} \sin \psi - F_{y,M} \sin(\psi - \phi) \\ & - m_S (b + c) \dot{\psi}^2 \cos \psi - m_S d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \cos(\psi - \phi) + (m_T + m_S) v_T \sin(\psi + \alpha_T) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} & (m_T + m_S) \sin(\psi + \alpha_T) \dot{v}_T + (m_T + m_S) v_T \cos(\psi + \alpha_T) \dot{\alpha}_T + \dots \\ & - m_S [(b + c) \cos \psi + d \cos(\psi - \phi)] \ddot{\psi} + m_S d \cos(\psi - \phi) \ddot{\phi} = \\ & F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{x,R} \sin \psi + F_{x,M} \sin(\psi - \phi) + \dots \\ & \dots + F_{y,F} \cos(\psi + \delta) + F_{y,R} \cos \psi + F_{y,M} \cos(\psi - \phi) \\ & - m_S (b + c) \dot{\psi}^2 \sin \psi - m_S d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin(\psi - \phi) - (m_T + m_S) v_T \cos(\psi + \alpha_T) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} & -m_S [(b + c) \sin \alpha_T + d \sin(\alpha_T + \phi)] \dot{v}_T - m_S [(b + c) v_T \cos \alpha_T + d v_T \cos(\alpha_T + \phi)] \dot{\alpha}_T \\ \dots + & \left\{ m_S [(b + c)^2 + 2(b + c) d \cos \phi + d^2] + I_T + I_S \right\} \ddot{\psi} - \left\{ m_S [(b + c) d \cos \phi + d^2] + I_S \right\} \ddot{\phi} = \dots \\ & \dots F_{x,F} a \sin \delta + F_{x,M} (b + c) \sin \phi + F_{y,F} a \cos \delta - F_{y,R} b - F_{y,M} [(b + c) \cos \phi + (d + e)] - \dots \\ & - m_S (b + c) d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin \phi + m_S (b + c) d \dot{\psi}^2 \sin \phi + m_S [(b + c) v_T \cos \alpha_T + d v_T \cos(\alpha_T + \phi)] \dot{\psi} \end{aligned} \quad (35c)$$

$$\begin{aligned} & m_S d \sin(\alpha_T + \phi) \dot{v}_T + m_S d v_T \cos(\alpha_T + \phi) \dot{\alpha}_T - \left\{ m_S [d^2 + (b + c) d \cos \phi] + I_S \right\} \ddot{\psi} + \dots \\ & \dots + (m_S d^2 + I_S) \ddot{\phi} = \dots \\ & \dots F_{y,M} (d + e) - m_S (b + c) d \dot{\psi}^2 \sin \phi - m_S d v_T \cos(\alpha_T + \phi) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (35d)$$

Os estados podem ser escolhidos como

$$x_1 = x \quad (36a)$$

$$x_2 = y \quad (36b)$$

$$x_3 = \psi \quad (36c)$$

$$x_4 = \phi \quad (36d)$$

$$x_5 = \dot{v}_T \quad (36e)$$

$$x_6 = \dot{\alpha}_T \quad (36f)$$

$$x_7 = \dot{\psi} \quad (36g)$$

$$x_8 = \dot{\phi} \quad (36h)$$

Na forma matricial o sistema da equação (35) pode ser escrito como

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (37)$$

onde o vetor de estados é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \quad (38)$$

e o vetor de entradas é

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta \\ F_{x,F} \\ F_{x,R} \\ F_{x,M} \\ F_{y,F} \\ F_{y,R} \\ F_{y,M} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

A matriz \mathbf{M} é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & M_{56} & M_{57} & M_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{65} & M_{66} & M_{67} & M_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{75} & M_{76} & M_{77} & M_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{85} & M_{86} & M_{87} & M_{88} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

onde os elementos são

$$M_{55} = (m_T + m_S) \cos(\psi + \alpha_T) \quad (41a)$$

$$M_{56} = -(m_T + m_S) v_T \sin(\psi + \alpha_T) \quad (41b)$$

$$M_{57} = m_S [(b + c) \sin \psi + d \sin(\psi - \phi)] \quad (41c)$$

$$M_{58} = -m_S d \sin(\psi - \phi) \quad (41d)$$

$$M_{65} = (m_T + m_S) \sin(\psi + \alpha_T) \quad (41e)$$

$$M_{66} = (m_T + m_S) v_T \cos(\psi + \alpha_T) \quad (41f)$$

$$M_{67} = -m_S [(b + c) \cos \psi + d \cos(\psi - \phi)] \quad (41g)$$

$$M_{68} = m_S d \cos(\psi - \phi) \quad (41h)$$

$$M_{75} = -m_S [(b + c) \sin \alpha_T + d \sin(\alpha_T + \phi)] \quad (41i)$$

$$M_{76} = -m_S [(b + c) v_T \cos \alpha_T + d v_T \cos(\alpha_T + \phi)] \quad (41j)$$

$$M_{77} = m_S \left[(b+c)^2 + 2(b+c)d \cos \phi + d^2 \right] + I_T + I_S \quad (41k)$$

$$M_{78} = -m_S \left[(b+c)d \cos \phi + d^2 \right] + I_S \quad (41l)$$

$$M_{85} = m_S d \sin(\alpha_T + \phi) \quad (41m)$$

$$M_{86} = m_S d v_T \cos(\alpha_T + \phi) \quad (41n)$$

$$M_{87} = -m_S \left[d^2 + (b+c)d \cos \phi \right] + I_S \quad (41o)$$

$$M_{88} = (m_S d^2 + I_S) \quad (41p)$$

As funções são dadas por

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} v_T \cos(\psi + \alpha_T) \\ v_T \sin(\psi + \alpha_T) \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

onde

$$\begin{aligned} f_5 &= F_{x,F} \cos(\psi + \delta) + F_{x,R} \cos \psi + F_{x,M} \cos(\psi - \phi) - \dots \\ \dots &- F_{y,F} \sin(\psi + \delta) - F_{y,R} \sin \psi - F_{y,M} \sin(\psi - \phi) - \dots \\ \dots &- m_S (b+c) \dot{\psi}^2 \cos \psi - m_S d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \cos(\psi - \phi) + (m_T + m_S) v_T \sin(\psi + \alpha_T) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} f_6 &= F_{x,F} \sin(\psi + \delta) + F_{x,R} \sin \psi + F_{x,M} \sin(\psi - \phi) + \dots \\ \dots &+ F_{y,F} \cos(\psi + \delta) + F_{y,R} \cos \psi + F_{y,M} \cos(\psi - \phi) \\ \dots &- m_S (b+c) \dot{\psi}^2 \sin \psi - m_S d (\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin(\psi - \phi) - (m_T + m_S) v_T \cos(\psi + \alpha_T) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (43b)$$

$$\begin{aligned}
f_7 &= F_{x,F}a \sin \delta + F_{x,M}(b+c) \sin \phi + F_{y,F}a \cos \delta - \dots \\
\dots &- F_{y,R}b - F_{y,M}[(b+c) \cos \phi + (d+e)] - \dots \\
\dots &- m_S(b+c)d(\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 \sin \phi + m_S(b+c)d\dot{\psi}^2 \sin \phi + \dots \\
\dots &+ m_S[(b+c)v_T \cos \alpha_T + dv_T \cos(\alpha_T + \phi)]\dot{\psi}
\end{aligned} \tag{43c}$$

$$f_8 = F_{y,M}(d+e) - m_S(b+c)d\dot{\psi}^2 \sin \phi - m_Sdv_T \cos(\alpha_T + \phi)\dot{\psi}. \tag{43d}$$

Portanto, o modelo não linear de veículo articulado é dado pelas equações (37), (38), (39), (40), (41), (42) e (43).

0.2 MODELO LINEARIZADO

A equação não linear (37) pode ser linearizada e escrita na forma matricial

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{44}$$

A linearização deste sistema pode ser feita para um veículo se movimentando em linha reta com uma determinada velocidade $v_T > 0$. Neste caso, os estados no ponto de operação são dados por

$$x_{1,op} = x_{op} = ? \tag{45a}$$

$$x_{2,op} = y_{op} = ? \tag{45b}$$

$$x_{3,op} = \psi_{op} = 0 \tag{45c}$$

$$x_{4,op} = \phi_{op} = 0 \tag{45d}$$

$$x_{5,op} = v_{T,op} = v_{T,0} \tag{45e}$$

$$x_{6,op} = \alpha_{T,op} = 0 \tag{45f}$$

$$x_{7,op} = \dot{\psi}_{op} = 0, \tag{45g}$$

$$x_{8,op} = \dot{\phi}_{op} = 0. \tag{45h}$$

OBS: Os estados x e y não influenciam a dinâmica do sistema.

O vetor do ponto de operação dos estados é

$$\mathbf{x}_{op} = \begin{bmatrix} x_{1,op} \\ x_{2,op} \\ x_{3,op} \\ x_{4,op} \\ x_{5,op} \\ x_{6,op} \\ x_{7,op} \\ x_{8,op} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Neste ponto de operação dos estados, o ponto de operação da derivada dos estados é dada por

$$\dot{x}_{1,op} = \dot{x}_{op} = v_{T,0} \quad (47a)$$

$$\dot{x}_{2,op} = \dot{y}_{op} = 0 \quad (47b)$$

$$\dot{x}_{3,op} = \dot{\psi}_{op} = 0 \quad (47c)$$

$$\dot{x}_{4,op} = \dot{\phi}_{op} = 0 \quad (47d)$$

$$\dot{x}_{5,op} = \dot{v}_{T,op} = 0 \quad (47e)$$

$$\dot{x}_{6,op} = \dot{\alpha}_{T,op} = 0 \quad (47f)$$

$$\dot{x}_{7,op} = \ddot{\psi}_{op} = 0, \quad (47g)$$

$$\dot{x}_{8,op} = \ddot{\phi}_{op} = 0. \quad (47h)$$

O vetor do ponto de operação da derivada dos estados é

$$\dot{\mathbf{x}}_{op} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,op} \\ \dot{x}_{2,op} \\ \dot{x}_{3,op} \\ \dot{x}_{4,op} \\ \dot{x}_{5,op} \\ \dot{x}_{6,op} \\ \dot{x}_{7,op} \\ \dot{x}_{8,op} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

O ponto de operação das entradas é

$$\delta_{op} = 0 \quad (49a)$$

$$F_{x,F,op} = 0 \quad (49b)$$

$$F_{x,R,op} = 0 \quad (49c)$$

$$F_{x,M,op} = 0 \quad (49d)$$

$$F_{y,F,op} = 0 \quad (49e)$$

$$F_{y,R,op} = 0. \quad (49f)$$

$$F_{y,M,op} = 0. \quad (49g)$$

O vetor do ponto de operação das entradas é

$$\mathbf{u}_{op} = \begin{bmatrix} \delta_{op} \\ F_{x,F,op} \\ F_{x,R,op} \\ F_{y,F,op} \\ F_{y,R,op} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Expandindo em série de Taylor a equação (37) e truncando nos termos de primeira ordem temos

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_{op}, \dot{\mathbf{x}}_{op}, \mathbf{u}_{op}) \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_{op} \\ \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{op} \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{op} \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_{op}, \dot{\mathbf{x}}_{op}, \mathbf{u}_{op}) \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_{op} \\ \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{op} \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{op} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

onde

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

é o lado esquerdo da equação (37), enquanto que o lado direito é dado por

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

O jacobiano das funções (52) e (53) é

$$\nabla \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{x}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \delta} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial F_{y,R}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_8}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial \dot{x}} & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial \delta} & \cdots & \frac{\partial g_8}{\partial F_{y,R}} \end{bmatrix} \quad (54a)$$

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \delta} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial F_{y,R}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_8}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial \dot{x}} & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial \delta} & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial F_{y,R}} \end{bmatrix}. \quad (54b)$$

Logo, as equações de movimento linearizadas são dadas por

$$(m_T + m_S)\dot{v}_T = F_{x,F} + F_{x,R} + F_{x,M} \quad (55a)$$

$$(m_T + m_S)v_{T,0}\dot{\alpha}_T - m_S(b + c + d)\ddot{\psi} + m_S d\ddot{\phi} = F_{y,F} + F_{y,R} + F_{y,M} - (m_S + m_T)v_{T,0}\dot{\psi} \quad (55b)$$

$$\begin{aligned}
-m_S(b+c+c)v_{T,0}\dot{\alpha}_T + [I_T + I_S + m_S(b+c+d)^2] \ddot{\psi} - [I_S + m_S(d^2 + (b+c)d)] \ddot{\phi} = \\
F_{y,F}a - F_{y,R}b - F_{y,M}(b+c+d+e) + m_S(b+c+d)v_{T,0}\dot{\psi}
\end{aligned} \tag{55c}$$

$$m_S dv_{T,0} \dot{\alpha}_T - (I_S + m_S(d^2 + (b+c)d)) \ddot{\psi} + (m_S d^2 + I_S) \ddot{\phi} = F_{y,M}(d+e) - m_S dv_{T,0} \dot{\psi} \tag{55d}$$

É possível notar que quando o somatório das forças longitudinais é zero a velocidade v_T se mantém constante.

As equações de estado são dadas por

$$\dot{x}_1 = x_5 \tag{56a}$$

$$\dot{x}_2 = (x_3 + x_6)v_{T,0} \tag{56b}$$

$$\dot{x}_3 = x_7 \tag{56c}$$

$$\dot{x}_4 = x_8 \tag{56d}$$

$$(m_S + m_T)\dot{x}_5 = F_{x,F} + F_{x,M} + F_{x,R} \tag{56e}$$

$$(m_T + m_S)v_{T,0}\dot{x}_6 - m_S(b+c+d)\dot{x}_7 + m_S d \dot{x}_8 = F_{y,F} + F_{y,R} + F_{y,M} - (m_S + m_T)v_{T,0}x_7 \tag{56f}$$

$$\begin{aligned}
-m_S(b+c+c)v_{T,0}\dot{x}_6 + [I_T + I_S + m_S(b+c+d)^2] \dot{x}_7 - [I_S + m_S(d^2 + (b+c)d)] \dot{x}_8 = \\
F_{y,F}a - F_{y,R}b - F_{y,M}(b+c+d+e) + m_S(b+c+d)v_{T,0}x_7
\end{aligned} \tag{56g}$$

$$m_S dv_{T,0} \dot{x}_6 - (I_S + m_S(d^2 + (b+c)d)) \dot{x}_7 + (m_S d^2 + I_S) \dot{x}_8 = F_{y,M}(d+e) - m_S dv_{T,0} x_7 \tag{56h}$$

Escrevendo a equação (56) na forma matricial da pela equação (44) a matriz \mathbf{E} é dada por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{65} & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{75} & E_{76} & E_{77} & E_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{85} & E_{86} & E_{87} & E_{88} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

onde os elementos são

$$E_{55} = (m_T + m_S) \quad (58a)$$

$$E_{56} = 0 \quad (58b)$$

$$E_{57} = 0 \quad (58c)$$

$$E_{58} = 0 \quad (58d)$$

$$E_{65} = 0 \quad (58e)$$

$$E_{66} = (m_S + m_T) v_{T,0} \quad (58f)$$

$$E_{67} = -m_S (b + c + d) \quad (58g)$$

$$E_{68} = dm_S \quad (58h)$$

$$E_{75} = 0 \quad (58i)$$

$$E_{76} = -m_S v_{T,0} (b + c + d) \quad (58j)$$

$$E_{77} = I_T + I_S + m_S (b + c + d)^2 \quad (58k)$$

$$E_{78} = -I_S - m_S [d^2 + (b + c)d] \quad (58l)$$

$$E_{85} = 0 \quad (58m)$$

$$E_{86} = dm_S v_{T,0} \quad (58n)$$

$$E_{87} = -I_S - m_S [d^2 + (b + c)d] \quad (58o)$$

$$E_{88} = m_S d^2 + I_S \quad (58p)$$

A matriz dinâmica do sistema é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{T,0} & 0 & 0 & v_{T,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(m_S + m_T)v_{T,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_S(b + c + d)v_{T,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_S d v_{T,0} & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b & -(b + c + d + e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d + e & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Portanto, o modelo linear de veículo articulado é dado pela equação (44) com as matrizes dadas pelas equações (57), (59) e (60).

0.2.1 Ângulos de deriva

A velocidade no eixo dianteiro é dada por

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_T + \mathbf{w}_T \wedge \mathbf{r}_{F/T}, \quad (61)$$

onde $\mathbf{r}_{F/T}$ é o vetor posição do ponto F em relação ao ponto T. Logo,

$$\mathbf{v}_F = (\dot{x} - a\dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{i} + (\dot{y} + a\dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{j}. \quad (62)$$

A velocidade no eixo traseiro é

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_T + \mathbf{w}_T \wedge \mathbf{r}_{R/T}, \quad (63)$$

onde $\mathbf{r}_{R/T}$ é o vetor posição do ponto R em relação ao ponto T. Logo,

$$\mathbf{v}_R = (\dot{x} + b\dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{i} + (\dot{y} - b\dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{j} \quad (64)$$

De maneira análoga, a velocidade do eixo do semirreboque é

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M = & \left[\dot{x} + (b+c)\dot{\psi} \sin \psi + (d+e)(\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin(\psi - \phi) \right] \mathbf{i} + \dots \\ & \dots + \left[\dot{y} - (b+c)\dot{\psi} \cos \psi - (d+e)(\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos(\psi - \phi) \right] \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (65)$$

Utilizando as equações (62), (64) e (65), os ângulos de deriva podem ser escritos como

$$\alpha_F = \arctan \left(\frac{\dot{y} + a\dot{\psi} \cos \psi}{\dot{x} - a\dot{\psi} \sin \psi} \right) - (\delta + \psi) \quad (66a)$$

$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{\dot{y} - b\dot{\psi} \cos \psi}{\dot{x} + b\dot{\psi} \sin \psi} \right) - \psi \quad (66b)$$

$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{\dot{y} - (b+c)\dot{\psi} \cos \psi - (d+e)(\dot{\psi} - \dot{\phi}) \cos(\psi - \phi)}{\dot{x} + (b+c)\dot{\psi} \sin \psi + (d+e)(\dot{\psi} - \dot{\phi}) \sin(\psi - \phi)} \right) - (\psi - \phi) \quad (66c)$$

Realizando a mudança de variáveis proposta na equação (33), os ângulos de deriva passam a ser

$$\alpha_F = \arctan \left(\frac{v_T \sin(\psi + \alpha_T) + a\dot{\psi} \cos \psi}{v_T \cos(\psi + \alpha_T) - a\dot{\psi} \sin \psi} \right) - (\delta + \psi) \quad (67a)$$

$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{v_T \sin(\psi + \alpha_T) - b\dot{\psi} \cos \psi}{v_T \cos(\psi + \alpha_T) + b\dot{\psi} \sin \psi} \right) - \psi \quad (67b)$$

$$\alpha_M = \quad (67c)$$

Simplificando, temos que

$$\alpha_F = \arctan \left(\frac{v_T \sin \alpha_T + a\dot{\psi}}{v_T \cos \alpha_T} \right) - \delta \quad (68a)$$

$$\alpha_R = \arctan \left(\frac{v_T \sin \alpha_T - b\dot{\psi}}{v_T \cos \alpha_T} \right) \quad (68b)$$

$$\alpha_M = \quad (68c)$$

Linearizando em torno do ponto de operação dado pelas equações (45), (47) e (49) temos

$$\alpha_{F,lin} = \alpha_T + \frac{a}{v_{T,0}} \dot{\psi} - \delta \quad (69a)$$

$$\alpha_{F,lin} = \alpha_T - \frac{b}{v_{T,0}} \dot{\psi}. \quad (69b)$$

$$\alpha_{M,lin} = \quad (69c)$$

0.3 SIMULAÇÃO

0.4 CONCLUSÃO

0.5 INCLUINDO PNEU LINEAR

Linearizando o valor do dos ângulos de deriva em (68) no mesmo ponto de operação temos

Supondo uma lei de força linear para os pneu temos

$$F_{y,F} = -K_F \alpha_F = -K_F \alpha_T - \frac{aK_F}{v_{T,0}} \dot{\psi} + K_F \delta \quad (70a)$$

$$F_{y,R} = -K_R \alpha_R = -K_R \alpha_T + \frac{bK_R}{v_{T,0}} \dot{\psi} \quad (70b)$$

Substituir as equações (70) nas equações linearizadas em (??) temos

$$f_{1,lin} = \dot{x} = v_T \quad (71a)$$

$$f_{2,lin} = \dot{y} = v_{T,0} (\psi + \alpha_T) \quad (71b)$$

$$f_{3,lin} = \dot{\psi} = \dot{\psi} \quad (71c)$$

$$f_{4,lin} = \dot{v}_T = \frac{F_{x,F} + F_{x,R}}{m_T} \quad (71d)$$

$$f_{5,lin} = \dot{\alpha}_T = -\frac{K_F + K_R}{m_T v_{T,0}} \alpha_T - \frac{m_T v_{T,0} + \frac{aK_F - bK_R}{v_{T,0}}}{m_T v_{T,0}} \dot{\psi} + \frac{K_F}{m_T v_{T,0}} \delta \quad (71e)$$

$$f_{6,lin} = \ddot{\psi} = -\frac{aK_F - bK_R}{I_T} \alpha_T - \frac{a^2 K_F + b^2 K_R}{I_T v_{T,0}} \dot{\psi} + \frac{aK_F}{I_T} \delta \quad (71f)$$

Na forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (72)$$

Ou ainda

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{v}_T \\ \dot{\alpha}_T \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{T,0} & 0 & v_{T,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_F+K_R}{m_T v_{T,0}} & -\frac{m_T v_{T,0} + \frac{aK_F - bK_R}{v_{T,0}}}{m_T v_{T,0}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{aK_F - bK_R}{I_T} & -\frac{a^2 K_F + b^2 K_R}{I_T v_{T,0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi \\ v_T \\ \alpha_T \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_T} & \frac{1}{m_T} \\ \frac{K_F}{m_T v_{T,0}} & 0 & 0 \\ \frac{aK_F}{I_T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ F_{x,F} \\ F_{x,R} \end{bmatrix} \quad (73)$$

REFERÊNCIAS