

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DA USP

ANDRÉ DE SOUZA MENDES

PROJETO DE OBSERVADOR DE ESTADOS PARA UM CARRO

São Paulo

2016

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 – Modelo do veículo	13
Ilustração 2 – Evolução dos estados para uma determinada condição inicial	22
Ilustração 3 – Diagrama de blocos da planta com o observador identidade	23
Ilustração 4 – Desempenho do observador identidade. As linhas tracejadas são as estimativas dos estados	25
Ilustração 5 – Desempenho do observador de Luenberger. As linhas tracejadas são as estimativas dos estados	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do veículo	21
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Geral

0	Inicial.
A	Matriz dinâmica do sistema linear.
<i>a</i>	Distância do ponto ao [m].
a	Vetor aceleração linear.
B	Matriz de entradas do sistema linear.
<i>b</i>	Distância do do ponto ao [m].
C	Matriz de saídas do sistema linear.
D	Matriz de transmissão direta do sistema linear.
E	Matriz de dimensionamento do observador.
<i>e</i>	Vetor de erro do observador.
<i>C</i>	Amortecimento [Ns/rad].
<i>ext</i>	Externo.
<i>K</i>	Rigidez de inclinação lateral [Nm/rad].
<i>k</i>	Rigidez de curva do pneu [N/rad].
<i>F</i>	módulo da força força [N].
F	Vetor força.
<i>f</i>	Função vetorial.
FD	Referente ao ponto que localiza o pneu dianteiro direito.
FE	Referente ao ponto que localiza o pneu dianteiro esquerdo.
<i>g</i>	Aceleração da gravidade [m/s ²].
<i>h</i>	Altura do centro de massa do veículo [m].
<i>I</i>	Elemento do tensor de inércia [kgm ²].
I	Tensor de inércia.
<i>l</i>	Distância entre os pneus de um mesmo eixo [m].
M	Vetor momento.
<i>m</i>	Massa [kg].
n	Vetor unitário da base ortonormal solidária ao elemento não suspenso.
O	Ponto que localiza a origem.
P	Vetor de força peso.
P	Matriz transformação.
P	Ponto que localiza uma determinada partícula.

r	Vetor posição.
RD	Referente ao ponto que localiza o pneu traseiro direito.
RE	Referente ao ponto que localiza o pneu traseiro esquerdo.
s	Vetor unitário da base ortonormal solidária a massa suspensa.
T	Ponto que localiza o centro de massa do veículo.
t	Vetor unitário da base ortonormal fixa ao referencial inercial.
u	Vetor de entradas.
V	Matriz qualquer.
v	Módulo do vetor velocidade [m/s].
v	Vetor velocidade linear.
w	Vetor da parte não observável.
w	Vetor velocidade angular.
x	Referente a direção longitudinal.
x	Vetor de estados.
y	Referente a direção transversar.
y	Vetor de saídas.
z	Referente a direção vertical.
z	Vetor de estados do observador (estimativa).

Grego

α	Ângulo de deriva [rad].
δ	Ângulo de esterçamento [rad].
Φ	Base solidária a massa suspensa.
ϕ	Ângulo de inclinação do veículo [rad].
Ω	Base fixa no referencial inercial.
Ψ	Base solidária ao elemento não suspenso.
ψ	Ângulo de orientação do veículo [rad].

SUMÁRIO

1	MODELO	13
1.1	MODELO DE PNEU	13
1.2	MODELO DE VEÍCULO	13
1.2.1	Não linear	14
1.2.2	Linearizado	19
2	OBSERVADOR IDENTIDADE	23
3	OBSERVADOR DE OREM REDUZIDA	26
	REFERÊNCIAS	28

1 MODELO

1.1 MODELO DE PNEU

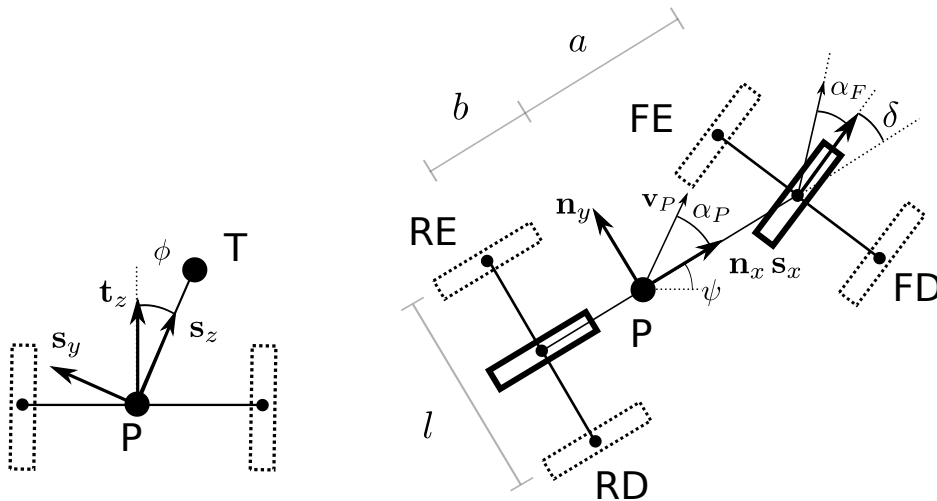
O modelo de pneu utilizado relaciona de maneira linear a força lateral do pneu com o ângulo de deriva que ele apresenta. Ou seja

$$F = -k\alpha. \quad (1)$$

1.2 MODELO DE VEÍCULO

O modelo físico de veículo utilizado se encontra ilustrado na figura 1. O sistema possui quatro graus de liberdade: duas coordenadas posicionando o ponto P, a orientação do veículo no plano horizontal ψ e o ângulo de inclinação ϕ .

Figura 1 – Modelo do veículo



Fonte: Autor

As bases utilizadas são $\Omega = \{O\mathbf{t}_x\mathbf{t}_y\mathbf{t}_z\}$, $\Psi = \{P\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y\mathbf{n}_z\}$ e $\Phi = \{P\mathbf{s}_x\mathbf{s}_y\mathbf{s}_z\}$. A base $\{O\mathbf{t}_x\mathbf{t}_y\mathbf{t}_z\}$ é fixa no referencial inercial. A origem é dada pelo ponto O e os vetores \mathbf{t}_x , \mathbf{t}_y e \mathbf{t}_z apontam para as direções longitudinal, transversal e vertical, respectivamente. A base $\{P\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y\mathbf{n}_z\}$ está solidária ao elemento não suspenso. A origem coincide com o ponto P que se mantém no plano formado pelos vetores \mathbf{t}_x e \mathbf{t}_y . O vetor \mathbf{n}_x forma um ângulo ψ com o vetor \mathbf{t}_x e o vetor \mathbf{t}_z é paralelo ao vetor \mathbf{n}_z . A base $\{P\mathbf{s}_x\mathbf{s}_y\mathbf{s}_z\}$ tem origem também coincidente com o

ponto P. O vetor \mathbf{n}_x é paralelo ao vetor \mathbf{s}_x . O vetor \mathbf{s}_z forma um ângulo ϕ com relação ao vetor \mathbf{n}_z . A coordenada angular α_P indica a orientação do vetor velocidade \mathbf{v}_P com relação ao eixo longitudinal do elemento não suspenso.

1.2.1 Não linear

O vetor velocidade do ponto P é dado por

$$\mathbf{v}_P = v_P \cos \alpha_P \mathbf{n}_x + v_P \sin \alpha_P \mathbf{n}_y \quad (2)$$

e os vetores posição dos pontos que localizam os quatro pneus do veículo (FD, FE, RD e RE) com relação ao ponto P são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{FD/P} &= a\mathbf{n}_x - \frac{l}{2}\mathbf{n}_y \\ \mathbf{r}_{FE/P} &= a\mathbf{n}_x + \frac{l}{2}\mathbf{n}_y \\ \mathbf{r}_{RD/P} &= -b\mathbf{n}_x - \frac{l}{2}\mathbf{n}_y \\ \mathbf{r}_{RE/P} &= -b\mathbf{n}_x + \frac{l}{2}\mathbf{n}_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Os vetores velocidade em cada roda podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{FD} &= \mathbf{v}_P + \mathbf{w}_\Psi \wedge \mathbf{r}_{FD/P} \\ \mathbf{v}_{FE} &= \mathbf{v}_P + \mathbf{w}_\Psi \wedge \mathbf{r}_{FE/P} \\ \mathbf{v}_{RD} &= \mathbf{v}_P + \mathbf{w}_\Psi \wedge \mathbf{r}_{RD/P} \\ \mathbf{v}_{RE} &= \mathbf{v}_P + \mathbf{w}_\Psi \wedge \mathbf{r}_{RE/P}. \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo as equações em (3) em (4) temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{FD} &= \left(v_P \cos \alpha_P + \frac{l}{2} \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_x + \left(v_P \sin \alpha_P + a \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_y \\
\mathbf{v}_{FE} &= \left(v_P \cos \alpha_P - \frac{l}{2} \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_x + \left(v_P \sin \alpha_P + a \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_y \\
\mathbf{v}_{RD} &= \left(v_P \cos \alpha_P + \frac{l}{2} \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_x + \left(v_P \sin \alpha_P - b \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_y \\
\mathbf{v}_{RE} &= \left(v_P \cos \alpha_P - \frac{l}{2} \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_x + \left(v_P \sin \alpha_P - b \dot{\psi} \right) \mathbf{n}_y.
\end{aligned} \tag{5}$$

Portanto, os ângulos de deriva em cada pneu são dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_{FD} &= \arctan \left(\frac{v_P \sin \alpha_P + a \dot{\psi}}{v_P \cos \alpha_P + \frac{l}{2} \dot{\psi}} \right) - \delta \\
\alpha_{FE} &= \arctan \left(\frac{v_P \sin \alpha_P + a \dot{\psi}}{v_P \cos \alpha_P - \frac{l}{2} \dot{\psi}} \right) - \delta \\
\alpha_{RD} &= \arctan \left(\frac{v_P \sin \alpha_P - b \dot{\psi}}{v_P \cos \alpha_P + \frac{l}{2} \dot{\psi}} \right) \\
\alpha_{RE} &= \arctan \left(\frac{v_P \sin \alpha_P - b \dot{\psi}}{v_P \cos \alpha_P - \frac{l}{2} \dot{\psi}} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

O vetor velocidade do centro de massa é dado por

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_P + \mathbf{w}_\Phi \wedge \mathbf{r}_{T/P}, \tag{7}$$

onde a mudança de orientação da base Φ é dada por

$$\mathbf{w}_\Phi = \dot{\phi} \mathbf{n}_x + 0 \mathbf{n}_y + \dot{\psi} \mathbf{n}_z. \tag{8}$$

A mudança de orientação da base Ψ é dada por

$$\mathbf{w}_\Psi = \dot{\psi} \mathbf{n}_z. \tag{9}$$

Logo o vetor velocidade do ponto T é

$$\mathbf{v}_T = (v_P \cos \alpha_P + \dot{\psi} h \sin \phi) \mathbf{n}_x + (v_P \sin \alpha_P - \dot{\phi} h \cos \phi) \mathbf{n}_y + (-\dot{\phi} h \sin \phi) \mathbf{n}_z. \quad (10)$$

Derivando a equação (10) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_T = & (\dot{v}_P \cos \alpha_P - v_P(\dot{\psi} + \dot{\alpha}_P) \sin \alpha_P + \ddot{\psi} h \sin \phi + 2h\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{n}_x + \dots \\ & \dots + (\dot{v}_P \sin \alpha_P + v_P(\dot{\psi} + \dot{\alpha}_P) \sin \alpha_P - \ddot{\phi} h \cos \phi + h(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2) \sin \phi) \mathbf{n}_y + \dots \\ & \dots + (-h\ddot{\phi} \sin \phi - h\dot{\phi}^2 \cos \phi) \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (11)$$

As forças nos quatro pneus são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{FD} &= (F_{FD,x} \cos \delta - F_{FD,y} \sin \delta) \mathbf{n}_x + (F_{FD,x} \sin \delta + F_{FD,y} \cos \delta) \mathbf{n}_y \\ \mathbf{F}_{FE} &= (F_{FE,x} \cos \delta - F_{FE,y} \sin \delta) \mathbf{n}_x + (F_{FE,x} \sin \delta + F_{FE,y} \cos \delta) \mathbf{n}_y \\ \mathbf{F}_{RD} &= F_{RD,x} \mathbf{n}_x + F_{RD,y} \mathbf{n}_y \\ \mathbf{F}_{RE} &= F_{RE,x} \mathbf{n}_x + F_{RE,y} \mathbf{n}_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Neste momento é importante observar que a força vertical em cada pneu é a força de vínculo que mantém o ponto de contato dos pneus contidos no plano horizontal.

O teorema do movimento do baricentro é dado por

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_{ext}. \quad (13)$$

Substituindo as equações (11) e (12) em (13), na direção \mathbf{n}_x temos

$$\begin{aligned} m \left(\dot{v}_P \cos \alpha_P - v_P(\dot{\psi} + \dot{\alpha}_P) \sin \alpha_P + \ddot{\psi} h \sin \phi + 2h\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \phi \right) = & \dots \\ \dots = & (F_{FD,x} + F_{FE,x}) \cos \delta - (F_{FD,y} + F_{FE,y}) \sin \delta + (F_{RD,x} + F_{RE,x}) \end{aligned} \quad (14)$$

e na direção \mathbf{n}_y temos

$$\begin{aligned}
m \left(\dot{v}_P \sin \alpha_P + v_P (\dot{\psi} + \dot{\alpha}_P) \sin \alpha_P - \ddot{\phi} h \cos \phi + h (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2) \sin \phi \right) = \dots \\
\dots = (F_{FD,x} + F_{FE,x}) \sin \delta + (F_{FD,y} + F_{FE,y}) \cos \delta + (F_{RD,y} + F_{RE,y}).
\end{aligned} \tag{15}$$

A posição do ponto T em relação ao ponto P na base Φ é

$$\mathbf{r}_{T/P} = h \mathbf{s}_z. \tag{16}$$

Além disso, a aceleração do ponto P é obtida derivando em relação ao tempo a equação (2). Escrevendo o resultado na base Φ temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_P = & \left(\dot{v}_P \cos \alpha_P - v (\dot{\alpha}_P + \dot{\psi}) \sin \alpha_P \right) \mathbf{s}_x + \left(\dot{v}_P \sin \alpha_P \cos \phi + (\dot{\alpha}_P + \dot{\psi}) \cos \alpha_P \cos \phi \right) \mathbf{s}_y - \dots \\
& \dots - \left(\dot{v}_P \sin \alpha_P \sin \phi + v (\dot{\alpha}_P + \dot{\psi}) \cos \alpha_P \sin \phi \right) \mathbf{s}_z.
\end{aligned} \tag{17}$$

O vetor \mathbf{w}_Φ escrito na base Φ é dado por

$$\mathbf{w}_\Phi = \dot{\phi} \mathbf{s}_x + \dot{\psi} \sin \phi \mathbf{s}_y + \dot{\psi} \cos \phi \mathbf{s}_z. \tag{18}$$

Derivando a equação (18) em relação ao tempo temos

$$\dot{\mathbf{w}}_\Phi = \ddot{\phi} \mathbf{s}_x + (\dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi + \ddot{\psi} \sin \phi) \mathbf{s}_y + (-\dot{\psi} \dot{\phi} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \phi) \mathbf{s}_z. \tag{19}$$

Os momentos das forças externas com relação ao ponto P são dados por

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{FD} &= \mathbf{r}_{FD/P} \wedge \mathbf{F}_{FD} \\
\mathbf{M}_{FE} &= \mathbf{r}_{FE/P} \wedge \mathbf{F}_{FE} \\
\mathbf{M}_{RD} &= \mathbf{r}_{RD/P} \wedge \mathbf{F}_{RD} \\
\mathbf{M}_{RE} &= \mathbf{r}_{RE/P} \wedge \mathbf{F}_{RE}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Substituindo as equações (3) e (12) em (20) e escrevendo o resultado na base Φ

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{FD}} &= \sin \phi \left(aF_{\text{FD},x} \sin \delta + aF_{\text{FD},y} \cos \delta + \frac{l}{2}F_{\text{FD},x} \cos \delta - \frac{l}{2}F_{\text{FD},y} \sin \delta \right) \mathbf{s}_y + \dots \\
&\quad \dots + \cos \phi \left(aF_{\text{FD},x} \sin \delta + aF_{\text{FD},y} \cos \delta + \frac{l}{2}F_{\text{FD},x} \cos \delta - \frac{l}{2}F_{\text{FD},y} \sin \delta \right) \mathbf{s}_z \\
\mathbf{M}_{\text{FE}} &= \sin \phi \left(aF_{\text{FE},x} \sin \delta + aF_{\text{FE},y} \cos \delta - \frac{l}{2}F_{\text{FE},x} \cos \delta + \frac{l}{2}F_{\text{FE},y} \sin \delta \right) \mathbf{s}_y + \dots \\
&\quad \dots + \cos \phi \left(aF_{\text{FE},x} \sin \delta + aF_{\text{FE},y} \cos \delta - \frac{l}{2}F_{\text{FE},x} \cos \delta + \frac{l}{2}F_{\text{FE},y} \sin \delta \right) \mathbf{s}_z \\
\mathbf{M}_{\text{RD}} &= \sin \phi \left(-bF_{\text{RD},y} + \frac{l}{2}F_{\text{RD},x} \right) \mathbf{s}_y + \cos \phi \left(-bF_{\text{RD},y} + \frac{l}{2}F_{\text{RD},x} \right) \mathbf{s}_z \\
\mathbf{M}_{\text{RE}} &= \sin \phi \left(-bF_{\text{RE},y} - \frac{l}{2}F_{\text{RE},x} \right) \mathbf{s}_y + \cos \phi \left(-bF_{\text{RE},y} - \frac{l}{2}F_{\text{RE},x} \right) \mathbf{s}_z.
\end{aligned} \tag{21}$$

O momento gerado pela força peso é dado por

$$\mathbf{M}_{\text{P}} = \mathbf{r}_{\text{T/P}} \wedge \mathbf{P} = (-h \sin \phi \mathbf{n}_y + h \cos \phi \mathbf{n}_z) \wedge (-mg) \mathbf{n}_z = mgh \sin \phi \mathbf{n}_x = mgh \sin \phi \mathbf{s}_x \tag{22}$$

e o momento gerado pela mola torcional é

$$\mathbf{M}_K = -K \phi \mathbf{s}_x. \tag{23}$$

Por fim, o momento gerado pelo amortecimento é

$$\mathbf{M}_K = -C \dot{\phi} \mathbf{s}_x. \tag{24}$$

O tensor de inércia em relação ao ponto P e escrito na base Φ é dado por

$$\mathbf{I}_{\text{P}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

O teorema da variação da quantidade de movimento angular em relação ao ponto P é dado, na forma matricial, por

$$m \underline{\underline{\mathbf{r}_{\text{T/P}}}} \underline{\underline{\mathbf{a}_{\text{P}}}} + \underline{\underline{\mathbf{w}_{\Phi}}} \underline{\underline{\mathbf{I}_{\text{P}}}} \underline{\underline{\mathbf{w}_{\Phi}}} + \underline{\underline{\mathbf{I}_{\text{P}}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{w}}_{\Phi}}} = \sum \underline{\underline{\mathbf{M}_{\text{ext,P}}}} \tag{26}$$

onde a notação sublinhado simples indica uma matriz coluna e sublinhado duplo indica uma matriz quadrada. As matrizes quadradas que representam vetores seguem a seguinte construção

$$\underline{\underline{\xi_x \mathbf{q}_x + \xi_y \mathbf{q}_y + \xi_z \mathbf{q}_z}} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_z & \xi_y \\ \xi_z & 0 & -\xi_x \\ -\xi_y & \xi_x & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde \mathbf{q} são os vetores unitários de uma base qualquer.

Logo, substituindo as equações (16), (17), (18), (19), (21), (22), (23), (24) e (25) em (26) temos na direção \mathbf{s}_x

$$\begin{aligned} I_{xx}\ddot{\phi} - I_{yz}\dot{\psi}^2 - I_{xz}\ddot{\psi} \cos \phi - I_{xy}\ddot{\psi} \sin \phi + \frac{(I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi}^2 \sin(2\phi)}{2} + 2I_{yz}\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi - \dots \\ \dots - \dot{v}_P h m \cos \phi \sin \alpha_P - (\dot{\alpha}_P + \dot{\psi}) h m v_P \cos \alpha_P \cos \phi = mgh \sin \phi - K\phi - C\dot{\phi} \end{aligned} \quad (28)$$

e na direção \mathbf{s}_z

$$\begin{aligned} I_{zz}(\ddot{\psi} \cos \phi - \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \phi) - \dot{\phi}(I_{xy}\dot{\phi} + I_{xx}\dot{\psi} \sin \phi) + \dots \\ \dots + \dot{\psi} \sin \phi (I_{yy}\dot{\phi} + I_{xy}\dot{\psi} \sin \phi) - \dot{\psi} \cos \phi (I_{yz}\dot{\phi} - I_{xz}\dot{\psi} \sin \phi) - \dots \\ \dots - I_{yz}(\ddot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos \phi) - I_{xz}\ddot{\phi} = \dots \\ \dots = \cos \phi a (F_{FD,x} + F_{FE,x}) \sin \delta + a (F_{FD,y} + F_{FE,y}) \cos \delta + \dots \\ \dots + \frac{l}{2} (F_{FD,x} - F_{FE,x}) \cos \delta + \frac{l}{2} (-F_{FD,y} + F_{FE,y}) \sin \delta + \dots \\ \dots + \cos \phi - b (F_{RD,y} + F_{RE,y}) + \frac{l}{2} (F_{RD,x} + F_{RE,x}). \end{aligned} \quad (29)$$

Logo, as equações de movimento do sistema são dadas pelas equações (14), (15), (28) e (29).

1.2.2 Linearizado

Este modelo apresenta as variáveis e derivadas temporais $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, v , \dot{v} , ϕ , $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, α_P e $\dot{\alpha}_P$. Logo, as equações dinâmicas (14), (15), (28) e (29) podem ser usadas para escrever explicitamente as derivadas temporais $\ddot{\psi}$, \dot{v} , $\dot{\alpha}_P$ e $\ddot{\phi}$ em função das demais variáveis e derivadas. Nesta situação o modelo passa a ser

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_P \\ \dot{v} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\dot{\psi}, v, \phi, \dot{\phi}, \alpha_P). \quad (30)$$

Em seguida o modelo é linearizado num dado ponto de operação. Neste relatório, todas as entradas, $F_{FD,x}$, $F_{FE,x}$, $F_{RD,x}$, $F_{RE,x}$, e δ , são consideradas zero. Em seguida, a linearização é realizada através do truncamento da expansão em série de Taylor da equação (30). Desta forma, o módulo do vetor velocidade v_P se mantém constante, portanto a equação diferencial correspondente a \dot{v}_P é desprezada.

O modelo linearizado pode ser escrito em espaço de estados. Na forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (31)$$

onde os estados são dados por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_P \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (32)$$

O vetor de saídas é composto pelas duas acelerações angulares, $\ddot{\psi}$ e $\ddot{\phi}$, que são as duas grandezas medidas do sistema. Ou seja, a matriz \mathbf{C} é composta pelas linhas 2 e 3 da matriz \mathbf{A} , portanto possui dimensão 2×4 .

Os dados utilizados na integração numérica estão apresentados na tabela 1. Os autovalores do sistema, neste caso são dado por

$$\begin{aligned} &-9.6448 + 6.1884i \\ &-9.6448 - 6.1884i \\ &-9.3713 + 0.0000i \\ &-2.3273 + 0.0000i \end{aligned}$$

Além disso, nesta situação, o para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é completamente observável, pois a matriz de observabilidade

$$Obs = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

apresenta posto pleno.

Tabela 1 – Parâmetros do veículo

Item	Descrição	Valor	Unidade
m	Massa do veículo	1000	kg
a	Distância entre o ponto P e o eixo dianteiro	1.2	m
b	Distância entre o ponto P e o eixo traseiro	1	m
h	Altura do centro de massa	0.5	m
l	Distância entre os pneus de um mesmo eixo	0.8	m
K	Rigidez da inclinação lateral	100.000	$N \cdot m/rad$
C	Amortecimento da inclinação lateral	10.000	$N \cdot s/rad$
k	Coefficiente de rigidez de curva	10.000	N/rad
I_{xx}	Momento de inércia	800	$kg \cdot m^2$
I_{yy}	Momento de inércia	1000	$kg \cdot m^2$
I_{zz}	Momento de inércia	1000	$kg \cdot m^2$
I_{xy}	Produto de inércia	200	$kg \cdot m^2$
I_{xz}	Produto de inércia	200	$kg \cdot m^2$
I_{yz}	Produto de inércia	200	$kg \cdot m^2$
v_P	Velocidade do ponto P	10	m/s

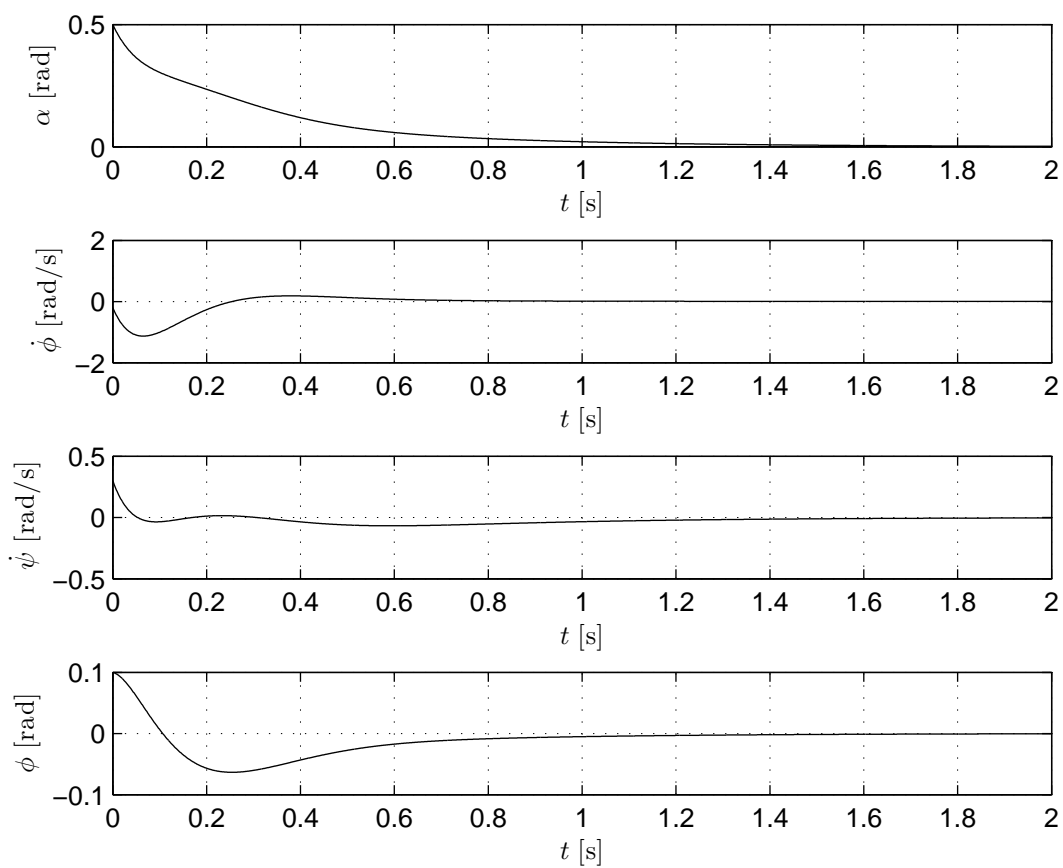
Fonte: Autor

A evolução dos estados para uma condição inicial dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{P,0} \\ \dot{\phi}_0 \\ \dot{\psi}_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

é ilustrada na figura 2. Nesta figura é possível observar que todos os estados convergem para zero num tempo de simulação menor que dois segundos.

Figura 2 – Evolução dos estados para uma determinada condição inicial

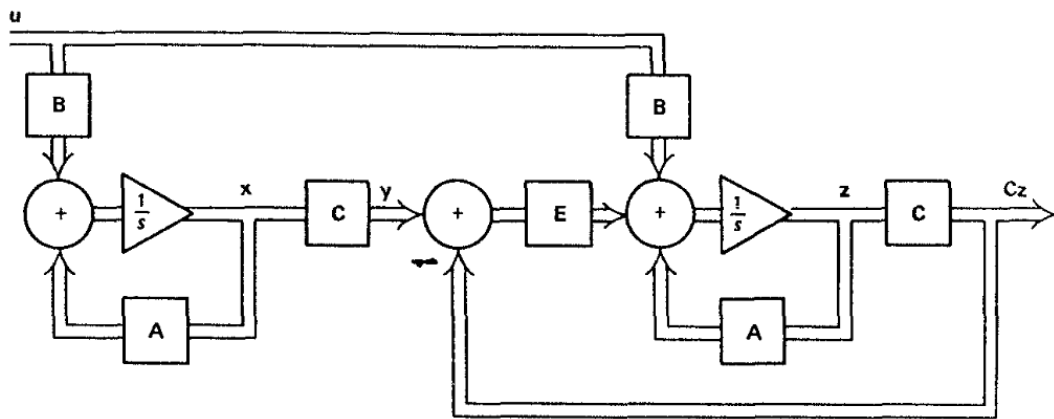


Fonte: Autor

2 OBSERVADOR IDENTIDADE

A configuração dos estados de um determinado sistema dinâmico pode ser obtida a partir da medição das variáveis do sistema através de sensores. Entretanto, em muitas situações práticas, a medição direta dos estados não é possível devido a sua condição inacessível. Para contornar esta limitação são aplicados os chamados observadores de estado. Estes modelos matemáticos estimam a configuração dos estados a partir das medições que foram realizadas. Na figura 3 é possível observar o diagrama de blocos do observador de estados identidade. Este observador estima, a partir das medidas, a condição dinâmica dos estados que compõem o sistema.

Figura 3 – Diagrama de blocos da planta com o observador identidade



Fonte: Autor "adaptado de" Luenberger, 1979

É possível observar que a equação dinâmica do observador é dada por

$$\dot{z} = (A - EC)z + Ey + Bu, \quad (35)$$

onde y é o vetor das variáveis medidas da planta e u é o vetor de entradas. Neste caso, ambos são considerados entradas do modelo do observador.

Comparando as equações (31) e (35) é possível demonstrar que

$$\dot{e} = (A - EC)e \quad (36)$$

onde $e = z - x$. Ou seja, e é igual ao erro de estimação. Através da matriz E , arbitrária, é feito o ajuste dos autovalores de $(A - EC)$. Quando os polos da equação (36) se encontram

a esquerda do eixo imaginário o erro converge para zero. Os polos do observador identidade foram escolhidos:

$$-96.4481 + 61.8839i$$

$$-96.4481 - 61.8839i$$

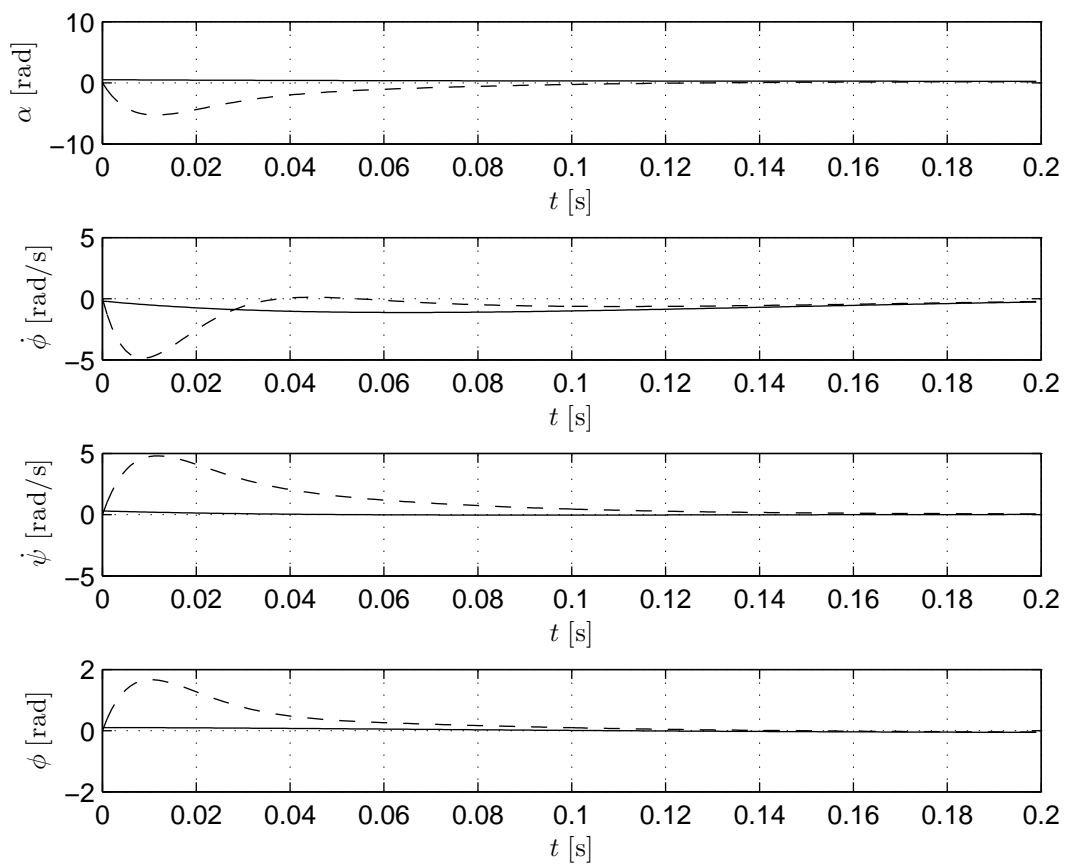
$$-93.7131 + 0.0000i$$

$$-23.2730 + 0.0000i$$

A matriz \mathbf{E} é obtida pelo comando *place* do programa *Matlab*.

O desempenho do observador identidade pode ser observado na figura 4. Nesta figura, as linhas cheias representam a evolução dos estados para a mesma integração apresentada na figura 2 e as linhas tracejadas indicam as estimativas dos estados \mathbf{z} obtidas integrando a equação (35) com entrada \mathbf{u} nula e \mathbf{y} com as informações de medição da planta. É possível observar que em menos de 0,2 segundos os estados estimados assumem os mesmos valores dos estados da integração do modelo linear que simula a planta.

Figura 4 – Desempenho do observador identidade. As linhas tracejadas são as estimativas dos estados



Fonte: Autor

3 OBSERVADOR DE OREM REDUZIDA

Uma outra abordagem consiste em utilizar um observador de ordem reduzida, devido ao grau de redundância que existe no observador identidade. Como duas medidas são realizadas, apenas dois estados precisam ser estimados. Para isto, é realizada uma transformação de variável através da matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

em que \mathbf{V} deve ser escolhida de tal maneira que a matriz \mathbf{P} tenha a mesma dimensão de \mathbf{A} e seja inversível.

O novo vetor transformado é

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

A equação dinâmica do observador é dada por

$$\dot{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{E}\bar{\mathbf{A}}_{21})\mathbf{z} + (\bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{E} - \mathbf{E}\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{E} + \bar{\mathbf{A}}_{12} - \mathbf{E}\bar{\mathbf{A}}_{22})\mathbf{y} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{E}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}. \quad (39)$$

O vetor \mathbf{z} é obtido integrando a equação (39) (com condições iniciais nulas) apenas com \mathbf{y} como entrada. Desta forma, a estimativa de \mathbf{w} pode ser calculada como

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{z} + \mathbf{E}\mathbf{y}. \quad (40)$$

A estimativa da variável transformada é dada por

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Por fim, a estimativa dos estados do sistema pode ser obtida pela equação

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\hat{\tilde{\mathbf{x}}}. \quad (42)$$

A descrição detalhada deste tipo de observador pode ser encontrada em Luenberger (1979).

Nesta técnica, a dinâmica do observador é, também, ajustada pela matriz \mathbf{E} . Os autovalores de $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{E}\bar{\mathbf{A}}_{21})$ são escolhidos como

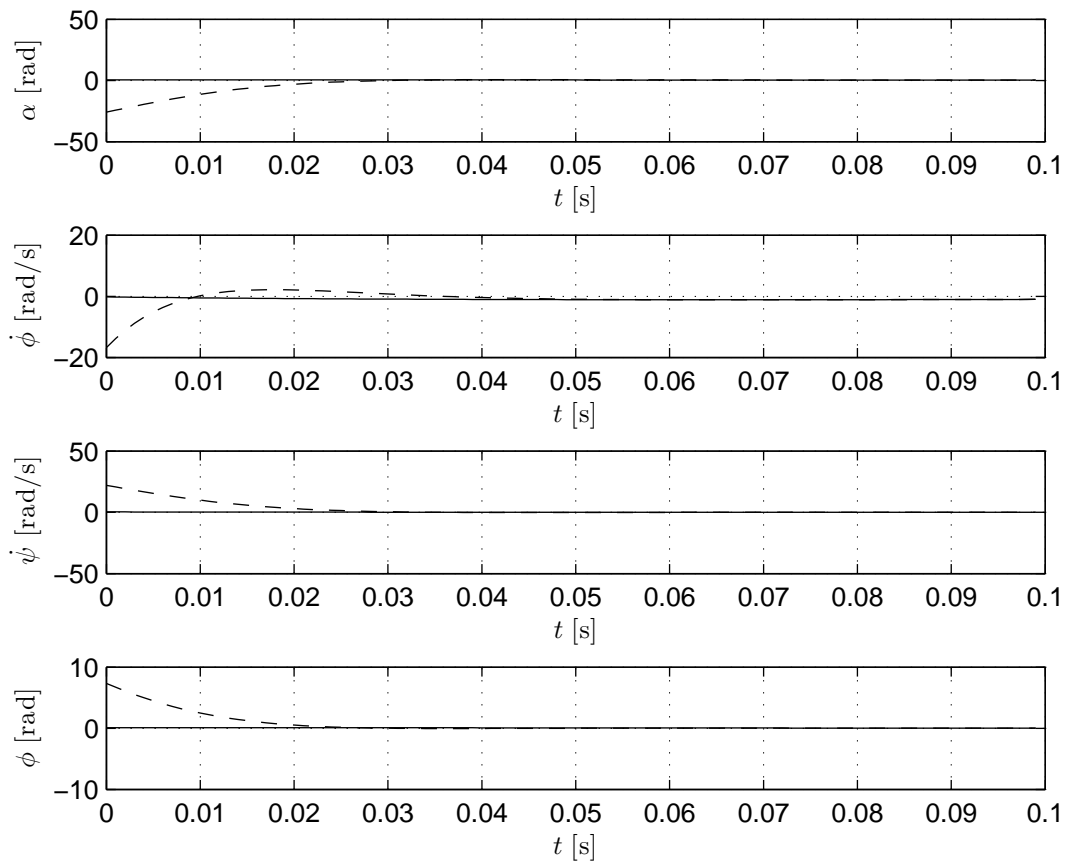
$$-96.4481 + 61.8839i$$

$$-96.4481 - 61.8839i$$

e a matriz \mathbf{E} é obtida pelo comando *place* do programa *Matlab*.

O desempenho do observador é ilustrada na figura 5 para a mesma integração vista na figura 2. Em menos de 0,1 segundos os estados estimados convergem para os valores dos estados do modelo linear que representa a planta.

Figura 5 – Desempenho do observador de Luenberger. As linhas tracejadas são as estimativas dos estados



Fonte: Autor

REFERÊNCIAS

LUENBERGER, D. Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications.
[S.l.]: Wiley, 1979.